УДК 517.977

**В. Н. Ушаков, В. М. Решетов, И. В. Байдосов, Д. К. Михалев**

# СВОЙСТВО СТАБИЛЬНОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ*

## 1. Введение

В работе исследуется дифференциальная игра сближения-уклонения с фиксированным моментом окончания. Предполагается, что фазовый вектор конфликтно-управляемой системы стеснен ограничениями, представляющими собой замкнутое множество в пространстве позиций. Для решения задачи используются конструкции стабильных мостов [1–5]. В связи с этим подробно обсуждаются различные варианты описания свойства стабильности, при помощи которого выделяются стабильные мосты. Рассматривается метод приближенного построения максимального стабильного моста в этой игре из работы [4]. Выписаны попятные рекуррентные соотношения, определяющие систему множеств, аппроксимирующую максимальный стабильный мост. Приведен пример вычисления аппроксимирующей системы множеств.

## 2. Постановка задачи

Пусть задана конфликтно-управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta < \infty)$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t, x, u, v), && x(t_0) = x_0, \\ &u \in P, && v \in Q. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x$ – $m$-мерный вектор из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $u$ – управление первого игрока, $v$ – управление второго игрока, $P$ и $Q$ – компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №05-01-00601, 04-01-96099-р2004урал_а), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-8512.2006.1 и программы научного сотрудничества с СО РАН.

А. Вектор-функция $f(t,x,u,v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных $(t,x,u,v)$ на множестве $I \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$ и удовлетворяет условию: для любого компакта $D \subset I \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$ найдется такое $L = L(D) \in (0,\infty)$, что

$$\|f(t,x^{(1)},u,v) - f(t,x^{(2)},u,v)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|$$

для любых $(t,x^{(i)},u,v)$ из $D$; $i = 1,2$.

Б. Существует такое число $\gamma \in (0,\infty)$, что

$$\|f(t,x,u,v)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|)$$

для любых $(t,x,u,v) \in I \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$.

Здесь $\|f\|$ – норма вектора $f$ в соответствующем евклидовом пространстве; $I$ – отрезок времени, содержащий внутри себя $[t_0,\vartheta]$ (т. е. $[t_0,\vartheta] \subset \operatorname{int} I$).

Будем рассматривать дифференциальную игру сближения-уклонения, которая складывается из задачи о сближении и задачи об уклонении (см. [1]). Игра происходит в ограниченной и замкнутой области $\varPhi = I \times \varPhi^*$, где $\varPhi^*$ – компактное множество из пространства $\mathbb{R}^m$.

В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание движения $x(t)$ $((t,x(t)) \in \varPhi$, $t \in [t_0,\vartheta])$ системы (1) в момент $\vartheta$ на замкнутое множество $M$, содержащееся в $\varPhi(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^m : (\vartheta,x) \in \varPhi\}$. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления первого игрока [1].

В задаче об уклонении, стоящей перед вторым игроком, требуется обеспечить уклонение движения $x(t)$ системы (1) от некоторой $\varepsilon$-окрестности $M_\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ множества $M$ в случае, если $(t,x(t)) \in \varPhi$, $t \in [t_0,\vartheta]$, или же обеспечить для движения $x(t)$ нарушение условия $(t,x(t)) \in \varPhi$, $t \in [t_0,\vartheta]$. Решение задачи требуется обеспечить в классе контрпозиционных процедур управления второго игрока [1].

Было показано [1], что для сформулированной дифференциальной игры справедлива альтернатива, а именно существует такое замкнутое множество $W^0 \subset \varPhi$, называемое множеством позиционного поглощения, что для всех исходных позиций $(t_*,x_*) \in W^0$ разрешима задача о сближении, а для всех исходных позиций $(t_*,x_*) \in \varPhi \setminus W^0$ разрешима задача об уклонении. При этом установлено, что $W^0$ есть максимальный $u$-стабильный мост, т. е. максимальное множество в $\varPhi$, содержащее множество $(\vartheta,M) = \{(\vartheta,x) : x \in M\}$ и обладающее свойством стабильности.

Определение свойства стабильности можно дать различными способами. Самая ранняя формулировка этого свойства появилась в работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см., например, [1]). В 70-е гг. в теории дифференциальных игр формулируется новое направление – унификация дифференциальных игр. Здесь прежде всего отметим исследования Н. Н. Красовского [2, 3], в которых было дано определение унификационных моделей, изучены их свойства и указаны перспективы применения в различных классах дифференциальных игр. Суть унификации, представленной в [2, 3], состоит в том, что свойство стабильности может быть выражено в терминах векторов сопряженных переменных и гамильтониана управляемой системы (1).

Здесь приведем одну из последних схем унификации в достаточно общем виде (условия A.1–A.3).

В 1.2 определим оператор стабильного поглощения, задающий свойство стабильности. Этот оператор определим при помощи условий A.1–A.3.

## 3. Оператор стабильного поглощения и стабильные мосты

Свойство стабильности является ключевым свойством при выделении в пространстве позиций $(t, x)$ игры максимального $u$-стабильного моста $W^0$, удовлетворяющего включению $W^0 \subset \Phi$.

Стабильность некоторого множества $W \subset \Phi$ означает слабую инвариантность $W$ относительно некоторого семейства дифференциальных включений, связанных с системой (1). Семейство дифференциальных включений мы определим при помощи условий A.1–A.3.

Для этого введем в рассмотрение функцию (гамильтониан системы (1))

$$H(t, x, \ell) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle \ell, f(t, x, u, v) \rangle, \quad \ell \in \mathbb{R}^m,$$

где $\langle \ell, f \rangle$ – скалярное произведение векторов $\ell$ и $f$ из $\mathbb{R}^m$.

Для удобства дальнейших рассуждений осуществим погружение области $\Phi$ в более широкую ограниченную и замкнутую область $D \subset I \times \mathbb{R}^m$. Эту область $D$ выберем таким образом, чтобы для некоторого наперед заданного $\varepsilon^* \in (0, \infty)$ выполнялось $\Phi_{\varepsilon^*} \subset D$.

Здесь $\Phi_\varepsilon$ – $\varepsilon$-окрестность множества $\Phi$ в пространстве переменных $t$, $x$.

Пусть $(t, x) \mapsto G(t, x) \subset \mathbb{R}^m$, $(t, x) \in D$ – непрерывное в хаусдорфовой метрике отображение. Предполагаем, что $G(t, x)$ – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющий включению $F(t, x) \subset G(t, x)$; здесь $F(t, x) = co\{f(t, x, u, v) : u \in P, v \in Q\}$, $co\{f\}$ – выпуклая оболочка множества $\{f\}$ векторов $f$.

Обозначим $K = \max\{\|g\| : (t, x) \in D,\ g \in G(t, x)\} < \infty$.

Пусть также задано некоторое множество $\Psi$ элементов $\psi$ и семейство $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ отображений $F_\psi : (t, x) \mapsto F_\psi(t, x) \subset \mathbb{R}^m$, $(t, x) \in D$, удовлетворяющее условиям:

A.1. Для любых $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$ множество $F_\psi(t, x)$ выпукло, замкнуто в $\mathbb{R}^m$ и $F_\psi(t, x) \subset G(t, x)$.

A.2. Для любых $(t, x, \ell) \in D \times S$ верно

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t,x)}(\ell) = H(t, x, \ell).$$

A.3. Существует такая скалярная функция $\omega^*(\delta)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$d(F_\psi(t_*, x_*), F_\psi(t^*, x^*)) \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|),$$

где $(t_*, x_*)$, $(t^*, x^*)$ из $D$, $\psi \in \Psi$.

Здесь $S = \{\ell \in \mathbb{R}^m : \|\ell\| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$, $h_F(\ell) = \sup\limits_{f \in F}\langle \ell, f\rangle$ – опорная функция множества $F \subset \mathbb{R}^m$, $d(F_*, F^*)$ – хаусдорфово расстояние между множествами $F_*$ и $F^*$ из $\mathbb{R}^m$.

Приведем примеры семейств $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$, удовлетворяющих условиям A.1, A.2, A.3.

Рассмотрим управляемые системы (1) с правой частью вида

$$f(t, x, u, v) = f^{(1)}(t, x, u) + f^{(2)}(t, x, v),$$

где вектор-функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ непрерывны по совокупности переменных $t$, $x$, $u$ и $t$, $x$, $v$ соответственно на $D \times P$ и $D \times Q$ и локально-липшицевы по $x$; $P$ и $Q$ – компакты в евклидовых пространствах.

Для системы (1) такого вида в качестве множества $\Psi$ возьмем множество $Q$ и, стало быть, в качестве элементов $\psi$ будем рассматривать элементы $v \in Q$. При этом в качестве множества $F_\psi(t, x)$ возьмем множество

$$F_v(t, x) = co\{f^{(1)}(t, x, u) : u \in P\} + f^{(2)}(t, x, v),$$

а в качестве множества $G(t, x)$ – $F(t, x)$.

Для так заданного семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\} = \{F_v : v \in Q\}$ условие A.1 очевидно выполняется.

Проверим выполнение условия A.2. В самом деле, имеем для любых $(t, x, \ell) \in D \times S$ и $v \in Q$

$$h_{F_v(t,x)}(\ell) = \max_{u \in P}\langle \ell, f^{(1)}(t, x, u)\rangle + \langle \ell, f^{(2)}(t, x, v)\rangle,$$

и, значит,

$$\min_{v \in Q} h_{F_v(t,x)}(\ell) = H(t, x, \ell).$$

Тем самым показано выполнение условия A.2.

Осталось показать, что в приведенном случае выполнено и условие A.3. Для этого рассмотрим произвольные точки $(t_*, x_*)$ и $(t^*, x^*)$ из $D$ и соответственно множества

$$F_v(t_*, x_*) = Y(t_*, x_*) + f^{(2)}(t_*, x_*, v),$$
$$F_v(t^*, x^*) = Y(t^*, x^*) + f^{(2)}(t^*, x^*, v);$$

здесь $v$ – некоторый вектор из $Q$, $Y(t,x) = co\{f^{(1)}(t,x,u) : u \in P\}$, $(t,x) \in D$.

Тогда

$$d(F_v(t_*, x_*), F_v(t^*, x^*)) \leqslant \sup_{u \in P} \|f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(u,v) \in P \times Q} \|f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v)\|.$$

Ясно, что скалярная функция

$$\omega^*(\delta) = \sup_{\substack{(t_*, x_*), (t^*, x^*) \text{ из } D: \\ |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \delta, \\ (u,v) \in P \times Q}} \|f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v)\|, \quad \delta > 0,$$

обладает свойством $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ и, кроме того, верно

$$\sup_{(u,v) \in P \times Q} \|f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v)\| \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|).$$

Следовательно, установлено, что для семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\} = \{F_v : v \in Q\}$ выполняется A.3.

Показано, что семейство $\{F_v : v \in Q\}$ удовлетворяет условиям A.1 – A.3.

В случае когда компакт $Q$ состоит из бесконечного числа точек $v$, семейство $\{F_v : v \in Q\}$ состоит из бесконечного числа отображений $(t,x) \mapsto F_v(t,x)$, $v \in Q$.

Приведем еще один пример семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$, удовлетворяющего условиям A.1–A.3 и состоящего из бесконечного числа отображений. Это унификационное семейство $F_\ell : \ell \in S$, введенное в работах [2, 3].

Определим подробнее $\{F_\ell : \ell \in S\}$.

Пусть $G$ – замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ радиуса $K < \infty$ с центром в $0 \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\max_{(t,x,u,v) \in D \times P \times Q} \|f(t,x,u,v)\| < K.$$

Введем в рассмотрение множества в $\mathbb{R}^m$

$$\Pi_\ell(t,x) = \{f \in \mathbb{R}^m : \langle \ell, f \rangle \leqslant H(t,x,\ell)\},$$
$$F_\ell = G \bigcap \Pi_\ell(t,x), \quad (t,x) \in D \times S.$$

Покажем, что семейство $\{F_\ell : \ell \in S\}$ отображений $(t,x) \mapsto F_\ell(t,x)$, $\ell \in S$, определенных на $D$, удовлетворяет условиям A.1 – A.3.

В связи с этим полагаем $G(t,x) = G$, $(t,x) \in D$.

Очевидно, что множество $F_\ell(t,x)$, $(t,x,\ell) \in D \times S$, выпукло, замкнуто в $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяет включению $F_\ell(t,x) \subset G$. Следовательно, семейство $\{F_\ell : \ell \in S\}$ удовлетворяет условию A.1.

Покажем теперь, что семейство $\{F_\ell : \ell \in S\}$ удовлетворяет условию A.2. Фактически мы приведем доказательство одного экстремального свойства множеств $F_\ell(t,x)$, $\ell \in S$. Это свойство было сформулировано А. И. Субботиным в начале 1970-х гг.

**Лемма 1.** *Для любой точки $(t,x) \in D$ и любых $\ell, s$ из $S$ верно*

$$h_{F_\ell(t,x)}(\ell) \leqslant h_{F_s(t,x)}(\ell). \tag{2}$$

**Доказательство.** Пусть в соответствие каждой тройке $(t,x,u) \in D \times P$ поставлены векторы $v_\ell(t,x,u)$ и $v_s(t,x,u)$ из $Q$:

$$\langle \ell, f(t,x,u,v_\ell(t,x,u)) \rangle = \min_{v \in Q} \langle \ell, f(t,x,u,v) \rangle,$$
$$\langle s, f(t,x,u,v_s(t,x,u)) \rangle = \min_{v \in Q} \langle s, f(t,x,u,v) \rangle.$$

В силу непрерывности функции $f(t,x,u,v)$ и компактности множества $Q$ эти векторы существуют.

В силу неравенств

$$\langle \ell, f(t,x,u,v_\ell(t,x,u)) \rangle \leqslant H(t,x,\ell),$$
$$\langle s, f(t,x,u,v_s(t,x,u)) \rangle \leqslant H(t,x,\ell)$$

и принадлежности векторов $f(t,x,u,v_\ell(t,x,u))$, $f(t,x,u,v_s(t,x,u))$ к $G$ выполняются включения

$$f(t,x,u,v_\ell(t,x,u)) \in F_\ell(t,x), \quad f(t,x,u,v_s(t,x,u)) \in F_s(t,x).$$

Символом $u_\ell(t,x)$ обозначим вектор из $P$, удовлетворяющий соотношению

$$\langle \ell, f(t,x,u_\ell(t,x),v_\ell(t,x,u_\ell(t,x))) \rangle = \max_{u \in P} \langle \ell, f(t,x,u,v_\ell(t,x,u)) \rangle.$$

Нетрудно видеть, что, в силу свойств, наложенных на функцию $f(t,x,u,v)$, и компактности множества $P$, такой вектор $u_\ell(t,x)$ действительно существует.

Из определения $v_\ell(t,x,u)$, $u \in P$, вытекает неравенство

$$\langle \ell, f(t,x,u,v_\ell(t,x,u)) \rangle \leqslant \langle \ell, f(t,x,u,v_s(t,x,u)) \rangle, \quad u \in P,$$

и, значит, для вектора $u_\ell(t,x) \in P$ выполняется

$$\langle \ell, f(t,x,u_\ell(t,x), v_\ell(t,x,u_\ell(t,x)))\rangle \leqslant \langle \ell, f(t,x,u_\ell(t,x), v_s(t,x,u_\ell(t,x)))\rangle.$$

Получили, что вектор $f(t,x,u_\ell(t,x), v_s(t,x,u_\ell(t,x)))$ удовлетворяет неравенству

$$H(t,x,\ell) \leqslant \langle \ell, f(t,x,u_\ell(t,x), v_s(t,x,u_\ell(t,x)))\rangle. \tag{3}$$

Кроме того, вектор $f(t,x,u_\ell(t,x), v_s(t,x,u_\ell(t,x)))$ удовлетворяет включению

$$f(t,x,u_\ell(t,x), v_s(t,x,u_\ell(t,x))) \in F_s(t,x), \tag{4}$$

поскольку выполняются

$$f(t,x,u_\ell(t,x), v_s(t,x,u_\ell(t,x))) \in G,$$
$$\langle s, f(t,x,u_\ell(t,x), v_s(t,x,u_\ell(t,x)))\rangle \leqslant H(t,x,s).$$

Учитывая (3) и равенство $H(t,x,\ell) = h_{F_\ell(t,x)}(\ell)$, получаем

$$h_{F_\ell(t,x)}(\ell) \leqslant \langle \ell, f(t,x,u_\ell(t,x), v_s(t,x,u_\ell(t,x)))\rangle. \tag{5}$$

Учитывая (4), получаем

$$\langle \ell, f(t,x,u_\ell(t,x), v_s(t,x,u_\ell(t,x)))\rangle \leqslant h_{F_s(t,x)}(\ell). \tag{6}$$

Из неравенств (5), (6) следует утверждение леммы 1.

Принимая во внимание лемму 1, получаем, что семейство $\{F_\ell : \ell \in S\}$ удовлетворяет условию A.2.

Далее, согласно определению шара $G$ и множеств $F_\ell(t,x)$, $(t,x,\ell) \in D \times S$, получаем, что

$$\operatorname{int} F_\ell(t,x) \neq \varnothing \text{ при любых } (t,x,\ell) \in D \times S.$$

Отсюда следует, что многозначное отображение $(t,x,\ell) \mapsto F_\ell(t,x)$ непрерывно в хаусдорфовой метрике на компакте $D \times S$ и, значит, равномерно непрерывно на $D \times S$.

Значит, существует такая скалярная функция $\omega^*(\delta)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), не зависящая от выбора точек $(t_*,x_*), (t^*,x^*) \in D$, что для всех $\ell \in S$

$$d(F_\ell(t_*,x_*), F_\ell(t^*,x^*)) \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|). \tag{7}$$

Таким образом, семейство $\{F_\ell : \ell \in S\}$ удовлетворяет условию A.3.

Вместе с тем показано, что семейство $\{F_\ell : \ell \in S\}$ удовлетворяет условиям А.1–А.3. Это семейство состоит из бесконечного числа отображений $(t,x) \mapsto$ $\mapsto F_\ell(t,x)$. Их столько, сколько векторов в сфере $S$ пространства $\mathbb{R}^m$.

С точки зрения разработки теоретических конструкций стабильности наличие семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$, включающего бесконечное число отображений $(t,x) \mapsto F_\psi(t,x)$, не является отягчающим фактором. Однако с точки зрения разработки алгоритмов приближенного вычисления стабильных мостов наличие бесконечного семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ существенно усложняет дело. При разработке алгоритмов приближенного вычисления стабильных мостов необходимо перейти к некоторой конечной совокупности $\{F^*_{\psi^*} : \psi^* \in \Psi^*\}$ отображений $(t,x) \mapsto F^*_{\psi^*}(t,x)$, удовлетворяющих А.1–А.3. При этом для некоторых задач конфликтного управления можно сразу указать такое конечное семейство $\{F^*_{\psi^*} : \psi^* \in \Psi^*\}$. Это семейство в некоторых случаях можно выбрать как подсемейство первоначального семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$.

Для иллюстрации того, как можно перейти к конечному семейству $\{F^*_{\psi^*} :$ $\psi^* \in \Psi^*\}$, удовлетворяющему условиям А.1–А.3, приведем ряд примеров.

**Пример 1.** Рассмотрим конфликтно-управляемую систему

$$\dot{x} = f(t,x) + u + v, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$
$$u \in P, \quad v \in Q,$$

где $P$ и $Q$ – соответственно вертикальный и горизонтальный отрезки в $\mathbb{R}^2$ ($P = [A,B]$, $Q = [C,E]$, где $A = (0,-1)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$, $E = (1,0)$).

Предполагаем, что вектор-функция $f(t,x,u,v) = f(t,x) + u + v$ удовлетворяет условиям А, Б из раздела 2.

Полагаем в этом примере для $(t,x) \in D$

$$G(t,x) = P(t,x) = f(t,x) + P + Q;$$

здесь $D$ – некоторая компактная область в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$,

$$f(t,x) + P + Q = \{f \in \mathbb{R}^2 : f = f(t,x) + u + v,\ u \in P,\ v \in Q\}.$$

Полагаем также для $(t,x,\ell) \in D \times S$

$$\Phi_\ell(t,x) = G(t,x) \bigcap \Pi_\ell(t,x),$$

где $\Pi_\ell(t,x)$ определено на с. 200.

Нетрудно видеть, что гиперплоскости

$$\Gamma_\ell(t,x) = \{f \in \mathbb{R}^2 : \langle \ell, f \rangle = H(t,x,\ell)\}$$

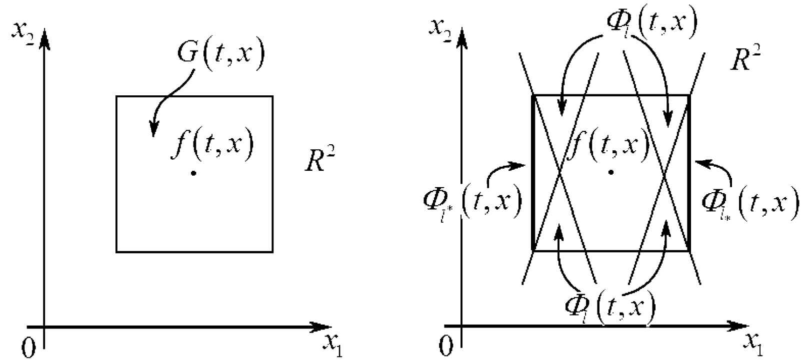



Рис. 1

в $\mathbb{R}^2$, представляющие собой границы полупространств $\Pi_\ell(t,x)$, проходят через одну из точек $f(t,x)+A+C$, $f(t,x)+A+E$, $f(t,x)+B+C$, $f(t,x)+$ $+B+E$, выделяя в квадрате $G(t,x)$ сегменты, содержащие вертикальные отрезки $\Phi_{\ell_*}(t,x)$ или $\Phi_{\ell^*}(t,x)$; здесь $\ell_*=(-1,0)$, $\ell^*=(1,0)$ (рис. 1).

Легко показывается, что семейство $\{\Phi_\ell : \ell\in S\}$ удовлетворяет условиям A.1–A.3 и это семейство бесконечно, т. е. состоит из бесконечного числа отображений: $(t,x)\mapsto\Phi_\ell(t,x)$, $(t,x)\in D$.

Кроме того, подсемейство семейства $\{\Phi_\ell : \ell\in S\}$, состоящее из двух отображений $(t,x)\mapsto\Phi_{\ell_*}(t,x)$ и $(t,x)\mapsto\Phi_{\ell^*}(t,x)$, также удовлетворяет условиям A.1–A.3.

Заметим, что верны равенства

$$\Phi_{\ell_*}(t,x)=\bigcap_{\ell\in S_*}\Phi_\ell(t,x),\quad \Phi_{\ell^*}(t,x)=\bigcap_{\ell\in S^*}\Phi_\ell(t,x),$$

где $S_*=\{\ell\in S:\langle\ell,\binom{1}{0}\rangle\leqslant 0\}$, $S^*=\{\ell\in S:\langle\ell,\binom{1}{0}\rangle\geqslant 0\}$.

Таким образом, в рассматриваемом примере от бесконечного семейства $\{\Phi_\ell : \ell\in S\}$, удовлетворяющего условиям A.1–A.3, мы перешли к удобному семейству, состоящему всего лишь из двух отображений: $(t,x)\mapsto\Phi_{\ell_*}(t,x)$ и $(t,x)\mapsto\Phi_{\ell^*}(t,x)$, также удовлетворяющему A.1–A.3. При этом значениями каждого из двух отображений являются множества простой структуры – отрезки на плоскости $\mathbb{R}^2$, что очень удобно для разработки алгоритмов приближенного вычисления стабильных мостов.

В самом деле, в существующих алгоритмах приближенного вычисления максимального $u$-стабильного моста $W^0$ вводится (см. раздел 4) аппроксимирующая система множеств $\{\widetilde{W}(t_i) : t_i\in\Gamma\}$, отвечающая некоторому конечному разбиению $\Gamma=\{t_0,t_1,\ldots,t_i,t_{i+1},\ldots,t_N=\vartheta\}$ промежутка $[t_0,\vartheta]$. Эта система определяется рекуррентно попятным образом по шагам $[t_i,t_{i+1}]$

от множества $\widetilde{W}(t_N) = M_{\varepsilon_N}$, где $\varepsilon_N$ – некоторое положительное число. На каждом шаге $[t_i, t_{i+1}]$ множество $\widetilde{W}(t_i)$ определяется по множеству $\widetilde{W}(t_{i+1})$ при помощи некоторых соотношений, в которых задействованы множества $F_\psi(t_i, x(t_i))$, $(t_i, x(t_i)) \in D$, $\psi \in \Psi$. А именно, в эти соотношения входят множества $\widetilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}(t_{i+1}))$, вводимые на с. 212. Нетрудно видеть, что чем проще устроено множество $F_\psi(t_i, x(t_i))$, тем проще построить множество $\widetilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}(t_{i+1}))$, $\psi \in \Psi$.

В рассматриваемом примере 1 построение множества $\widetilde{W}(t_i)$ сведется к последовательной процедуре вычисления множеств

$$\widetilde{X}_{\ell_*}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}(t_{i+1})), \qquad \widetilde{X}_{\ell^*}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}(t_{i+1}))$$

и их пересечения:

$$\widetilde{X}_{\ell_*}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}(t_{i+1})) \bigcap \widetilde{X}_{\ell^*}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}(t_{i+1})).$$

Приведем еще один пример построения конечного семейства отображений $(t, x) \mapsto F_\psi(t, x)$, $\psi \in \Psi$. Этот пример взят из работы [4], но мы продвинемся здесь несколько дальше в его исследовании.

**Пример 2.** Рассмотрим конфликтно-управляемую систему, функционирующую на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, поведение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + u + v, \quad x(t_0) = x_0, \tag{8}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$ – фазовый вектор системы; $u \in P$, $v \in Q$ – управления первого и второго игроков соответственно; $P$ и $Q$ – выпуклые компакты, такие как на рис. 2. Предполагаем, что $f(t, x, u, v) = f(t, x) + u + v$ удовлетворяет условиям А, Б из раздела 2.

Так как для системы (8) выполняется условие подлинейного роста, то можно считать, что любое движение $x(t)$ $(t \in [t_0, \vartheta])$ системы (8) не выйдет за пределы замкнутого шара конечного радиуса. В качестве множества $D$ будем рассматривать этот шар.

В случае системы вида (8) множество $\Psi$ можно выбрать четырехэлементным: полагаем $\Psi = \{1, 2, 3, 4\}$. При этом в качестве множеств $F_\psi(t, x)$ можно рассмотреть семейство множеств вида

$$\begin{aligned}
\{F_1(t,x) &= f(t,x) + F_1^0(t,x), & F_2(t,x) &= f(t,x) + F_2^0(t,x), \\
F_3(t,x) &= f(t,x) + F_3^0(t,x), & F_4(t,x) &= f(t,x) + F_4^0(t,x)\},
\end{aligned}$$

где $F_1^0(t,x)$, $F_2^0(t,x)$, $F_3^0(t,x)$ и $F_4^0(t,x)$ – выпуклые замкнутые многоугольники, изображенные на рис. 3.

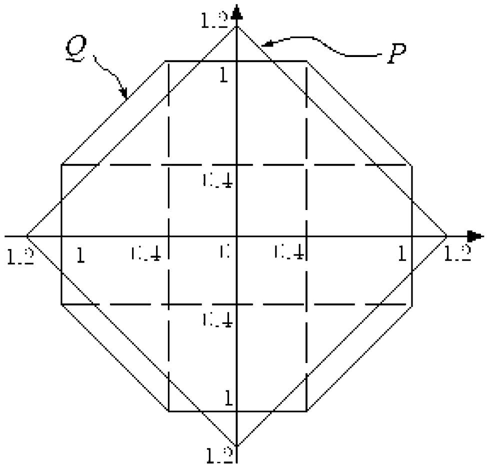



Рис. 2

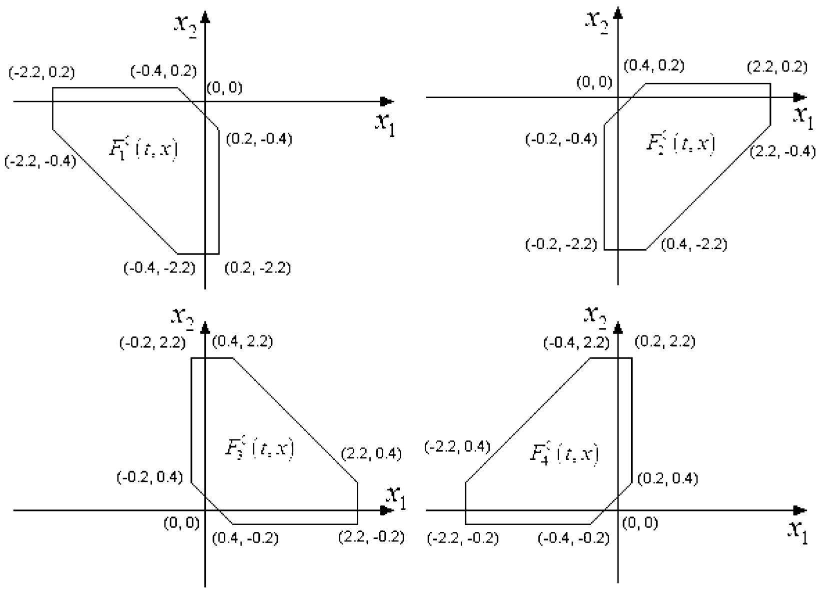



Рис. 3

Покажем, что это семейство множеств $\{F_\psi(t,x)\}$ удовлетворяет условиям А.1–А.3.

В рассматриваемом случае в качестве множеств $G(t,x)$ $(t,x) \in D$ можно взять множества вида

$$G(t,x) = f(t,x) + co\{u + v : u \in P,\ v \in Q\}.$$

Нетрудно убедиться, что выполняется условие A.1. Действительно, для любых $(t,x,\psi) \in D \times \Psi$ множество $F_\psi(t,x)$ выпукло и замкнуто в $\mathbb{R}^m$ и $F_\psi(t,x) \subset G(t,x)$.

Проверим, что выполняется условие A.2.

На рис. 4 изображены конусы $S_1$–$S_8$ линейности и конусы $L_1$–$L_4$ выпуклости гамильтониана $H^0(t,x,\ell)$ по сопряженной переменной $\ell$ системы (8) в случае, когда $f(t,x) = 0$ при любых $(t,x) \in D$.

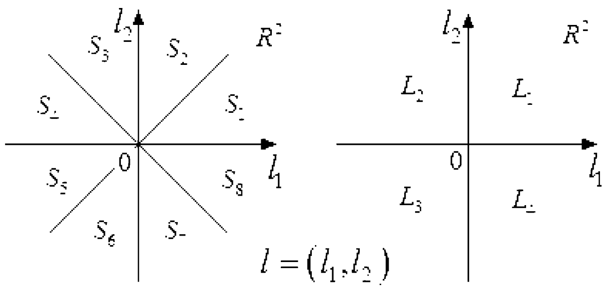



Рис. 4

Выпишем $H^0(t,x,\ell) = \max\limits_{u\in P}\min\limits_{v\in Q}\langle \ell, u+v\rangle$:

$$H^0(t,x,\ell) = \begin{cases} \langle \ell, \binom{1.2}{0}\rangle + \langle \ell, \binom{-1}{-0.4}\rangle = \langle \ell, \binom{0.2}{-0.4}\rangle, & \ell \in S_1, \\ \langle \ell, \binom{0}{1.2}\rangle + \langle \ell, \binom{-0.4}{-1}\rangle = \langle \ell, \binom{-0.4}{0.2}\rangle, & \ell \in S_2, \\ \langle \ell, \binom{0}{1.2}\rangle + \langle \ell, \binom{0.4}{-1}\rangle = \langle \ell, \binom{0.4}{0.2}\rangle, & \ell \in S_3, \\ \langle \ell, \binom{-1.2}{0}\rangle + \langle \ell, \binom{1}{-0.4}\rangle = \langle \ell, \binom{-0.2}{-0.4}\rangle, & \ell \in S_4, \\ \langle \ell, \binom{-1.2}{0}\rangle + \langle \ell, \binom{1}{0.4}\rangle = \langle \ell, \binom{-0.2}{0.4}\rangle, & \ell \in S_5, \\ \langle \ell, \binom{0}{-1.2}\rangle + \langle \ell, \binom{0.4}{1}\rangle = \langle \ell, \binom{0.4}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_6, \\ \langle \ell, \binom{0}{-1.2}\rangle + \langle \ell, \binom{-0.4}{1}\rangle = \langle \ell, \binom{-0.4}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_7, \\ \langle \ell, \binom{1.2}{0}\rangle + \langle \ell, \binom{-1}{0.4}\rangle = \langle \ell, \binom{0.2}{0.4}\rangle, & \ell \in S_8. \end{cases}$$

На рис. 5 и 6 изображены график и линии уровня функции $H^0(t,x,\ell)$ по сопряженной переменной $\ell$.

Заметим, что в общем случае гамильтониан системы (8) равен

$$H(t,x,\ell) = \langle \ell, f(t,x)\rangle + H^0(t,x,\ell).$$

Вычислим опорные функции $h_{F_\psi(t,x)}(\ell)$ $(\ell \in \mathbb{R}^m)$ множеств $F_\psi(t,x)$ $(\psi \in \Psi)$.

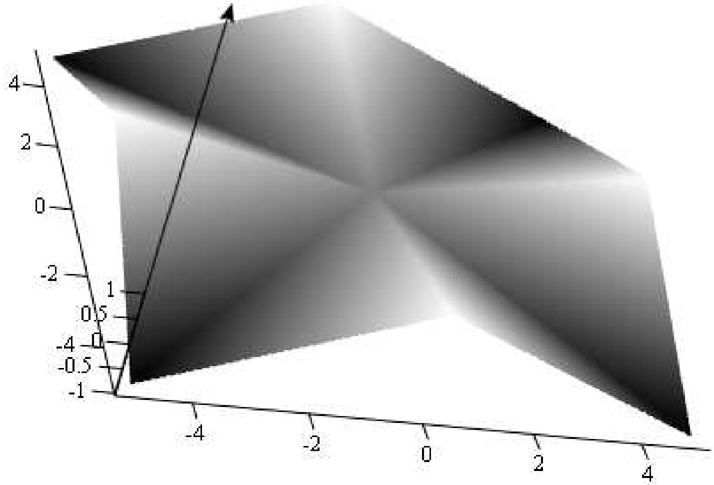



Рис. 5

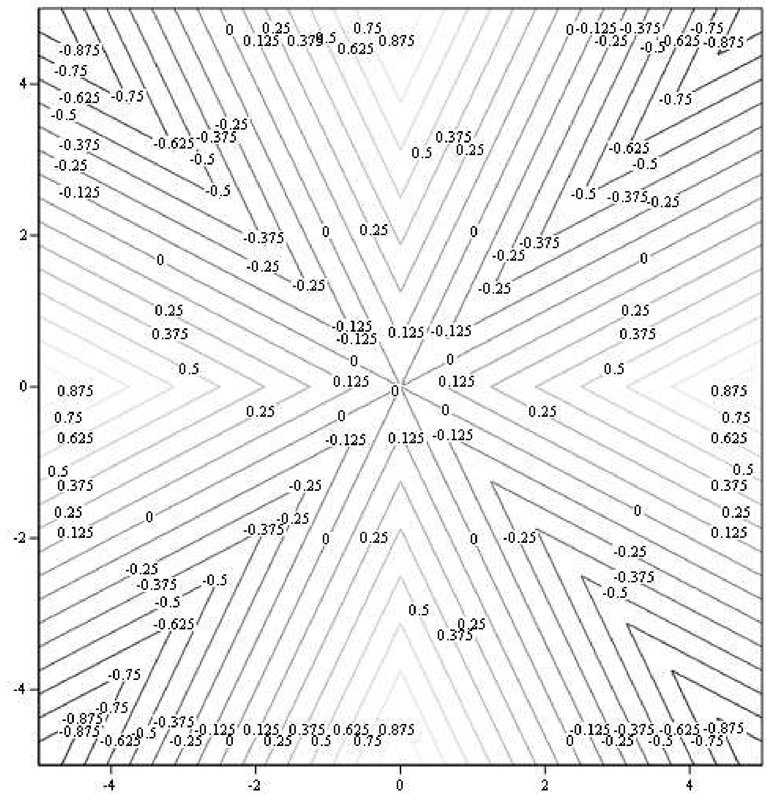



Рис. 6

$$
\begin{aligned}
&h_{F_1(t,x)}(\ell) = \\
&\quad = \langle \ell, f(t,x)\rangle + \begin{cases}
\langle \ell, \binom{0.2}{-0.4}\rangle, & \ell \in S_1,\\
\langle \ell, \binom{-0.4}{0.2}\rangle, & \ell \in S_2,\\
\langle \ell, \binom{-2.2}{0.2}\rangle, & \ell \in S_3,\\
\langle \ell, \binom{-2.2}{0.2}\rangle, & \ell \in S_4,\\
\langle \ell, \binom{-2.2}{-0.4}\rangle, & \ell \in S_5,\\
\langle \ell, \binom{-0.4}{-2.2}\rangle, & \ell \in S_6,\\
\langle \ell, \binom{0.2}{-2.2}\rangle, & \ell \in S_7,\\
\langle \ell, \binom{0.2}{-2.2}\rangle, & \ell \in S_8.
\end{cases}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&h_{F_2(t,x)}(\ell) = \\
&\quad = \langle \ell, f(t,x)\rangle + \begin{cases}
\langle \ell, \binom{2.2}{0.2}\rangle, & \ell \in S_1,\\
\langle \ell, \binom{2.2}{0.2}\rangle, & \ell \in S_2,\\
\langle \ell, \binom{0.4}{0.2}\rangle, & \ell \in S_3,\\
\langle \ell, \binom{-0.2}{-0.4}\rangle, & \ell \in S_4,\\
\langle \ell, \binom{-0.2}{-2.2}\rangle, & \ell \in S_5,\\
\langle \ell, \binom{-0.2}{-2.2}\rangle, & \ell \in S_6,\\
\langle \ell, \binom{0.4}{-2.2}\rangle, & \ell \in S_7,\\
\langle \ell, \binom{2.2}{-0.4}\rangle, & \ell \in S_8.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&h_{F_3(t,x)}(\ell) = \\
&\quad = \langle \ell, f(t,x)\rangle + \begin{cases}
\langle \ell, \binom{2.2}{0.4}\rangle, & \ell \in S_1,\\
\langle \ell, \binom{0.2}{2.2}\rangle, & \ell \in S_2,\\
\langle \ell, \binom{-0.2}{2.2}\rangle, & \ell \in S_3,\\
\langle \ell, \binom{-0.2}{2.2}\rangle, & \ell \in S_4,\\
\langle \ell, \binom{-0.2}{0.4}\rangle, & \ell \in S_5,\\
\langle \ell, \binom{0.4}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_6,\\
\langle \ell, \binom{2.2}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_7,\\
\langle \ell, \binom{2.2}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_8.
\end{cases}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&h_{F_4(t,x)}(\ell) = \\
&\quad = \langle \ell, f(t,x)\rangle + \begin{cases}
\langle \ell, \binom{0.2}{2.2}\rangle, & \ell \in S_1,\\
\langle \ell, \binom{0.2}{2.2}\rangle, & \ell \in S_2,\\
\langle \ell, \binom{-0.4}{2.2}\rangle, & \ell \in S_3,\\
\langle \ell, \binom{-2.2}{0.4}\rangle, & \ell \in S_4,\\
\langle \ell, \binom{-2.2}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_5,\\
\langle \ell, \binom{-2.2}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_6,\\
\langle \ell, \binom{-0.4}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_7,\\
\langle \ell, \binom{0.2}{0.4}\rangle, & \ell \in S_8,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Найдем $\min\limits_{\psi\in\Psi} h_{F_\psi(t,x)}(\ell)$:

$$
\min_{\psi\in\Psi} h_{F_\psi(t,x)}(\ell) = \langle \ell, f(t,x)\rangle + \begin{cases}
h_{F_1^0(t,x)}(\ell), & \ell \in S_1,\\
h_{F_1^0(t,x)}(\ell), & \ell \in S_2,\\
h_{F_2^0(t,x)}(\ell), & \ell \in S_3,\\
h_{F_2^0(t,x)}(\ell), & \ell \in S_4,\\
h_{F_3^0(t,x)}(\ell), & \ell \in S_5,\\
h_{F_3^0(t,x)}(\ell), & \ell \in S_6,\\
h_{F_4^0(t,x)}(\ell), & \ell \in S_7,\\
h_{F_4^0(t,x)}(\ell), & \ell \in S_8.
\end{cases} =
$$

$$= \langle \ell, f(t,x)\rangle + \begin{cases} \langle \ell, \binom{0.2}{-0.4}\rangle, & \ell \in S_1, \\ \langle \ell, \binom{-0.4}{0.2}\rangle, & \ell \in S_2, \\ \langle \ell, \binom{0.4}{0.2}\rangle, & \ell \in S_3, \\ \langle \ell, \binom{-0.2}{-0.4}\rangle, & \ell \in S_4, \\ \langle \ell, \binom{-0.2}{0.4}\rangle, & \ell \in S_5, \\ \langle \ell, \binom{0.4}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_6, \\ \langle \ell, \binom{-0.4}{-0.2}\rangle, & \ell \in S_7, \\ \langle \ell, \binom{0.2}{0.4}\rangle, & \ell \in S_8. \end{cases} = H(t,x,\ell).$$

В результате получили, что $\min\limits_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t,x)}(\ell) = H(t,x,\ell)$. Таким образом, условие A.2 выполняется.

Осталось проверить условие A.3.

Заметим, что для любых $(t_*,x_*)$, $(t^*,x^*)$ из $I \times D$ и любого $\psi \in \Psi$ выполняется

$$F^0_\psi(t_*,x_*) = F^0_\psi(t^*,x^*).$$

Имеем

$$F_\psi(t^*,x^*) = f(t^*,x^*) + F^0_\psi(t^*,x^*),$$
$$F_\psi(t_*,x_*) = f(t_*,x_*) + F^0_\psi(t_*,x_*).$$

Из этих равенств следует

$$F^0_\psi(t^*,x^*) = -f(t^*,x^*) + F_\psi(t^*,x^*)$$

и далее

$$F_\psi(t_*,x_*) = f(t_*,x_*) + F^0_\psi(t_*,x_*) = f(t_*,x_*) + F^0_\psi(t^*,x^*) = \\ = f(t_*,x_*) - f(t^*,x^*) + F_\psi(t^*,x^*).$$

То есть множество $F_\psi(t_*,x_*)$ получается из множества $F_\psi(t^*,x^*)$ сдвигом на вектор $f(t_*,x_*) - f(t^*,x^*)$.

Легко заметить, что функция

$$\omega^*(\delta) = \sup_{\substack{(t_*,x_*),(t^*,x^*) \text{ из } D: \\ |t_*-t^*|+\|x_*-x^*\| \leqslant \delta}} \|f(t_*,x_*) - f(t^*,x^*)\| \quad -$$

модуль непрерывности функции $f(t,x)$ на компакте $D$ – обладает свойством $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ и при этом выполняется

$$d(F_\psi(t_*,x_*), F_\psi(t^*,x^*)) \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|).$$

Таким образом, получили, что семейство отображений $(t,x) \mapsto F_\psi(t,x)$, $\psi \in \Psi$ удовлетворяет условию А.3.

Итак, мы показали, что семейство отображений $(t,x) \mapsto F_\psi(t,x)$, $\psi \in \Psi$ удовлетворяет А.1 – А.3.

При построении оператора стабильного поглощения рассматриваются дифференциальные включения вида

$$\dot{x} \in F_\psi(t,x), \quad \psi \in \Psi.$$

Для простоты вычислений удобнее иметь дело с одноточечными множествами $F_\psi(t,x)$. В этом случае дифференциальные включения подменяются дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = F_\psi(t,x), \qquad \psi \in \Psi.$$

Если рассмотреть восьмиэлементное множество $\Psi$ и множества $F_\psi(t,x)$ вида

$$\begin{aligned}
F_1(t,x) &= \left\{ f(t,x) + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix} \right\}, & F_2(t,x) &= \left\{ f(t,x) + \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right\}, \\
F_3(t,x) &= \left\{ f(t,x) + \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right\}, & F_4(t,x) &= \left\{ f(t,x) + \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix} \right\}, \\
F_5(t,x) &= \left\{ f(t,x) + \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \right\}, & F_6(t,x) &= \left\{ f(t,x) + \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} \right\}, \\
F_7(t,x) &= \left\{ f(t,x) + \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} \right\}, & F_8(t,x) &= \left\{ f(t,x) + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

то для этого семейства множеств будут выполняться условия А.1 и А.3, но перестанет выполняться условие А.2. Таким образом, семейство, состоящее из восьми точечных отображений $(t,x) \mapsto F_\psi(t,x)$, указанных выше, не удовлетворяет набору условий А.1–А.3.

Вернемся к рассмотрению четырехэлементного множества $\Psi$.

Заметим, что для выполнения А.2 достаточно каждое из множеств $F^0_\psi(t,x)$ $(\psi \in \Psi)$ подменить двухточечным множеством следующим образом:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}^0_1(t,x) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right\}, \\
\widehat{F}^0_2(t,x) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix} \right\}, \\
\widehat{F}^0_3(t,x) &= \left\{ \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} \right\}, \\
\widehat{F}^0_4(t,x) &= \left\{ \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

но в этом случае перестает выполняться условие А.1.

Для произвольного компактного множества $F$ справедливо равенство $h_F(\ell) = h_{coF}(\ell)$. Следовательно, если подменить множества $F^0_\psi(t,x)$ ($\psi \in \Psi$) множествами

$$\overline{F}^0_1(t,x) = co\left\{ \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\overline{F}^0_2(t,x) = co\left\{ \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\overline{F}^0_3(t,x) = co\left\{ \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\overline{F}^0_4(t,x) = co\left\{ \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \right\},$$

то условие A.2 нарушаться не будет, но вместе с тем будет выполняться и условие A.1.

Действительно, рассмотрим четырехэлементное семейство отображений $(t,x) \mapsto F_\psi(t,x)$, где

$$\begin{aligned} \{F_1(t,x) = f(t,x) + \overline{F}^0_1(t,x), \quad F_2(t,x) = f(t,x) + \overline{F}^0_2(t,x),\\ F_3(t,x) = f(t,x) + \overline{F}^0_3(t,x), \quad F_4(t,x) = f(t,x) + \overline{F}^0_4(t,x)\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Для любых $(t,x,\psi) \in D \times \Psi$ множество $\overline{F}_\psi(t,x)$ выпукло и замкнуто в $\mathbb{R}^m$ и $\overline{F}_\psi \subset G(t,x)$. Таким образом, выполняется условие A.1.

Проверим выполнение условия A.2:

$$\begin{aligned} H(t,x,\ell) &= \min_{\psi\in\Psi} h_{f(t,x)+\widehat{F}_\psi(t,x)}(\ell) = \\ &= \min_{\psi\in\Psi} h_{co\{f(t,x)+\widehat{F}_\psi(t,x)\}}(\ell) = \min_{\psi\in\Psi} h_{\overline{F}_\psi(t,x)}(\ell). \end{aligned}$$

Условие A.3 проверяется так же, как в предыдущем случае.

Следовательно, четырехэлементное семейство (9) удовлетворяет условиям A.1–A.3.

Приведем определение оператора стабильного поглощения в рассматриваемой задаче о сближении в общей форме, выраженной в терминах отображений $(t,x) \mapsto F_\psi(t,x)$, $\psi \in \Psi$, удовлетворяющих A.1 – A.3.

Полагаем $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$ – множество всех $x^* \in \mathbb{R}^m$, в которые приходят в момент $t^* \in [t_*, \vartheta]$ решения $x(\cdot) = (x(t) : t_* \le t \le t^*)$ дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t,x)$, $x(t_*) = x_*$. Полагаем также $X^{-1}_\psi(t_*; t^*, X^*) = \{x_* \in \in \mathbb{R}^m : X_\psi(t^*; t_*, x_*) \bigcap X^* \neq \varnothing\}$, где $X^* \subset \mathbb{R}^m$.

**Определение 1.** Оператором стабильного поглощения $\pi$ в задаче о сближении назовем отображение $\pi : (t_*, t^*, X^*) \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$, $(t_*, t^*, X^*) \in \Delta \times 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\pi(t_*; t^*, X^*) = \varPhi(t_*) \bigcap \Big( \bigcap_{\psi \in \varPsi} X_{\psi}^{-1}(t_*; t^*, X^*) \Big).$$

Здесь $\Delta = \{(t_*, t^*) : t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta\}$ – подмножество $[t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta]$.

**Определение 2.** Замкнутое множество $W \subset \varPhi$ назовем $u$-стабильным мостом в задаче о сближении, если

$$W(\vartheta) \subset M; \qquad W(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, W(t^*)), \qquad (t_*, t^*) \in \Delta.$$

Здесь $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\}$.

Приведенное выше определение 2 стабильного моста гораздо более позднее, чем определение стабильности из [1]. Однако можно показать, что они эквивалентны в том смысле, что $u$-стабильные мосты, выделяемые при помощи этих определений в $\varPhi$, одни и те же. Это обстоятельство дает нам право использовать семейства $\{F_\psi : \psi \in \varPsi\}$, удовлетворяющие условиям A.1–A.3, для выделения в $\varPhi$ максимального $u$-стабильного моста $W^0$ – множества позиционного поглощения.

## 4. Аппроксимирующая система множеств $\{\widetilde{\mathbf{W}}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{t_i}) : \mathbf{t_i} \in \varGamma_{\mathbf{n}}\}$

При решении задачи о сближении на основе позиционного подхода основная тяжесть ложится на построение моста $W^0$. Известно, что описать точно мост $W^0$ при помощи аналитических соотношений можно лишь для некоторых классов систем (1). В общем же случае приходится отказаться от точного выделения множества $W^0$. В связи с этим на передний план выступает задача приближенного построения $W^0$, решению которой и посвящен этот параграф. В нем приводится определение аппроксимирующей системы множеств, предложенное в работе [4] и ориентированное на приближенное вычисление множества $W^0$.

Понятие аппроксимирующей системы множеств возникает при подмене непрерывной (по времени) схемы $u$-стабильности дискретной схемой. А именно, промежуток $[t_0, \vartheta]$ подменяется конечным разбиением $\varGamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = \vartheta\}$, а множества $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$, $\psi \in \varPsi$, отвечающие семейству $\{F_\psi : \psi \in \varPsi\}$, подменяются множествами $x_* + (t^* - t_*) F_\psi(t_*, x_*)$, $\psi \in \varPsi$. Далее определения 1, 2 соответствующим образом трансформируются в определения, предназначенные для работы с дискретным временем $t_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1, N$.

В связи с этой трансформацией непрерывной (по времени) схемы в определениях появляются различные $\varepsilon$-окрестности множеств. Появление этих $\varepsilon$-окрестностей есть своеобразная плата за переход от непрерывной схемы к дискретной схеме $u$-стабильности.

Итак, рассмотрим подробнее эту дискретную схему $u$-стабильности.

Предполагаем, что семейство $\{F_\psi : \psi \in \varPsi\}$ удовлетворяет, наряду с условиями A.1–A.3, также условию

A.4. Существует $\lambda \in (0, \infty)$ такое, что

$$d(F_\psi(t, x_*), F_\psi(t, x^*)) \leqslant \lambda \|x_* - x^*\|$$

для любых $\psi \in \varPsi$, $(t, x_*)$, $(t, x^*)$ из $\varPhi_{\varepsilon^*}$.

Полагаем

$$\widetilde{X}_\psi(t^*; t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*) F_\psi(t_*, x_*),$$

$$\widetilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : \widetilde{X}_\psi(t^*; t_*, x_*) \bigcap X^* \neq \varnothing\};$$

здесь $(t_*, t^*) \in \Delta$, $x_* \in \mathbb{R}^m$, $\psi \in \varPsi$.

**Определение 3.** Аппроксимирующим оператором стабильного поглощения $\pi^\varepsilon$ $(\varepsilon \in (0, \varepsilon^*))$ в задаче о сближении назовем отображение

$$(t_*, t^*, X^*) \mapsto \Delta \times 2^{\mathbb{R}^m},$$

заданное соотношением

$$\pi^\varepsilon(t_*; t^*, X^*) = \varPhi_\varepsilon(t_*) \bigcap \Big( \bigcap_{\psi \in \varPsi} \widetilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) \Big).$$

Обозначим

$$\omega(\delta) = \delta \omega^*((1 + K)\delta), \quad \delta > 0. \tag{10}$$

Из определения функции $\omega(\delta)$ следует, что она монотонно убывает к нулю при $\delta \downarrow 0$, причем $\lim\limits_{\delta \downarrow 0} \dfrac{\omega(\delta)}{\delta} = 0$.

Зададим последовательность разбиений $\varGamma_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N(n)} = \vartheta\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ таких, что диаметры $\Delta^{(n)} = \max\{\Delta_i : 0 \leqslant i \leqslant N(n) - 1\}$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ разбиений $\varGamma_n$ монотонно стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Отметим, что моменты $t_i$ разбиений $\varGamma_n$ – свои для каждого разбиения $\varGamma_n$; однако, чтобы не усложнять обозначений, эту зависимость моментов $t_i$ от номера $n$ явно отражать не будем.

Каждому разбиению $\varGamma_n$ поставим в соответствие последовательность $\{\varepsilon_i\}$ чисел $\varepsilon_i = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + \lambda \Delta_{i-1}) \varepsilon_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N(n)$, $\varepsilon_0 = 0$.

Примем также, что разбиения $\varGamma_n$ выбраны настолько «мелкими», что для любого $\varGamma_n$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered}\max_{0\leqslant i\leqslant N(n)-1}(1+K)\Delta_i=(1+K)\Delta^{(n)}\leqslant\varepsilon^*,\\ \max_{0\leqslant i\leqslant N(n)-1}\varepsilon_i\leqslant\varepsilon^*.\end{gathered}\tag{11}$$

Поставим в соответствие каждому разбиению $\varGamma_n$ последовательность $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ множеств $\widetilde{W}^{(n)}(t_i)\subset\mathbb{R}^m$, $t_i\in\varGamma_n$, заданную рекуррентными соотношениями, начиная от конечного элемента $t_{N(n)}=\vartheta$ разбиения $\varGamma_n$.

**Определение 4.** $\widetilde{W}^{(n)}(\vartheta)=M_{\varepsilon_{N(n)}}$, $\widetilde{W}^{(n)}(t_i)=\pi^{\varepsilon_i}(t_i;t_{i+1},\widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1}))$, где $i=N(n)-1,N(n)-2,\ldots,1,0$.

Таким образом, последовательность $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ представляет собой попятно (во времени) заданную последовательность множеств $\widetilde{W}^{(n)}(t_i)\subset\mathbb{R}^m$.

Определим предел этой последовательности, когда $\Delta^{(n)}$ – диаметр разбиения $\varGamma_n$ стремится к нулю.

**Определение 5.** Полагаем $\varOmega^0$ – множество всех $(t_*,x_*)\in\varPhi$, для каждой из которых найдется такая последовательность

$$\{(\tau_n,x_n):\tau_n=t_n(t_*),x_n\in\widetilde{W}^{(n)}(\tau_n)\},\tag{12}$$

что $(t_*,x_*)=\lim\limits_{n\to\infty}(\tau_n,x_n)$; здесь $\tau_n(t_*)=\min\limits_{t_i\in\varGamma_n,\,t_i\geqslant t_*}t_i$.

В силу равенства $\widetilde{W}^{(n)}(\vartheta)=M_{\varepsilon_{N(n)}}$ сечение $\varOmega^0(\vartheta)=\{x\in\mathbb{R}^m:(\vartheta,x)\in\varOmega^0\}$ множества $\varOmega^0$ определяется равенством $\varOmega^0(\vartheta)=M$. Значит, $\varOmega^0\neq\varnothing$. Кроме того, из определения 5 следует $\varOmega^0\subset\varPhi$.

**Теорема 1.** $\varOmega^0=W^0$.

Эта теорема, которую мы приводим здесь без доказательства, сформулирована и доказана в [4]. В ней утверждается, что предел $\varOmega^0$ аппроксимирующей системы множеств $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i):t_i\in\varGamma_n\}$ при $\Delta^{(n)}\to0$, $n\to\infty$, есть максимальный $u$-стабильный мост $W^0$.

Отметим также, что по построению системы $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i):t_i\in\varGamma_n\}$ имеют место включения

$$W^0(t_i)\subset\widetilde{W}^{(n)}(t_i),\quad t_i\in\varGamma_n.$$

Таким образом, система $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i):t_i\in\varGamma_n\}$ аппроксимирует множество $W^0$ сверху. В общем случае не удается установить оценку сверху для хаусдорфова расстояния

$$d(W^0(t_i),\widetilde{W}^{(n)}(t_i)),\quad t_i\in\varGamma_n,$$

между множествами $W^0(t_i)$ и $\widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$, в зависимости от диаметра $\Delta^{(n)}$ разбиения $\Gamma_n$. Но отсутствие такой оценки скрашивает тот факт, что множество $W^0$ мажорируется множествами $\widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$. Тем самым в дискретной схеме с разбиением $\Gamma_n$ при приближенном построении решений в задаче о сближении, т. е. при построении управлений первого игрока, приводящих на множество $M_{\varepsilon_{N(n)}}$, мы захватываем в каждый момент $t_i \in \Gamma_n$ несколько большее множество в $\mathbb{R}^m$ (т. е. множество $\widetilde{W}^{(n)}(t_i)$), чем множество $W^0(t_i)$. Из точек этого множества может быть успешно решена задача о сближении с $M_{\varepsilon_{N(n)}}$ при помощи некоторой процедуры управления с поводырем первого игрока.

## 5. Пример приближенного вычисления максимального стабильного моста в одной задаче на плоскости

Рассматривается конфликтно-управляемая система на плоскости $\mathbb{R}^2$, описываемая дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,5 \cdot x_1(1 - x_2) + u_1 + v_1, \\ \dot{x}_2 = -0,5 \cdot x_2(1 - x_1) + u_2 + v_2, \end{cases} \tag{13}$$

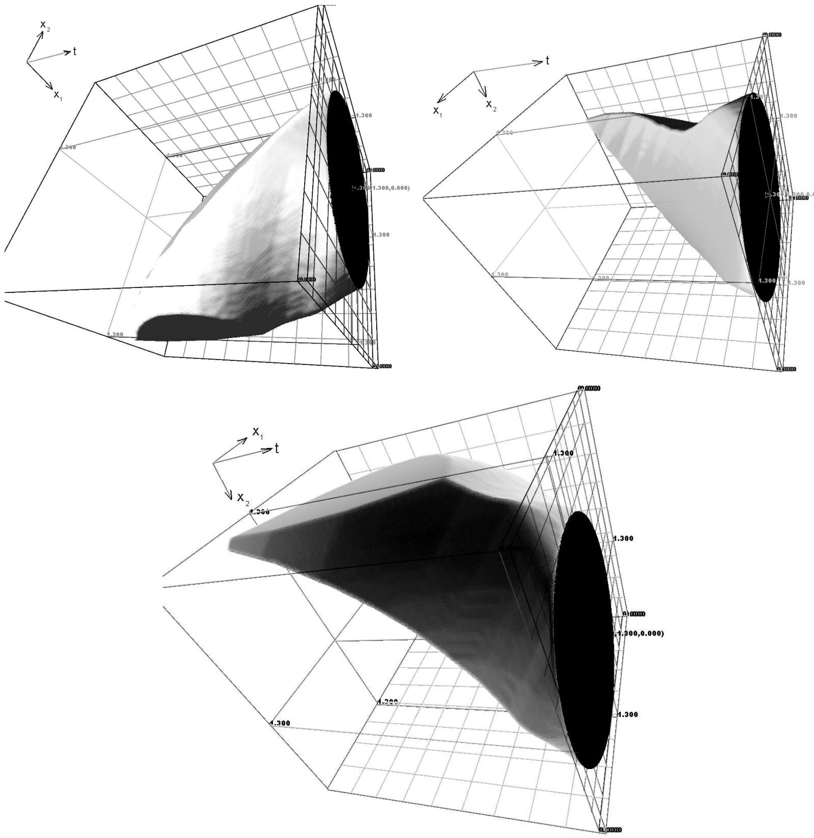
где $x = (x_1, x_2)$ – фазовый вектор системы; $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ соответственно векторы управлений первого и второго игроков, удовлетворяющие соотношениям $u \in P$, $v \in Q$, где $P$ и $Q$ – многоугольники на плоскости из примера 2 (с. 205).

Для системы (13) заданы отрезок времени $[t_0, \vartheta] = [0; 4,3]$ и целевое множество $M$ – круг с центром в точке $(1,3; 1,3)$ и радиуса $0,4$. Кроме того, имеется множество $\Phi$ – квадрат на плоскости с вершинами $(0,7; 0,7)$, $(0,7; 2,1)$, $(2,1; 0,7)$, $(2,1; 2,1)$.

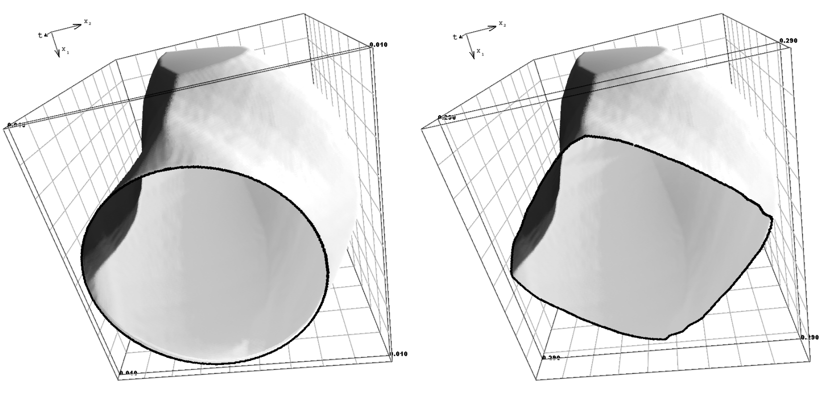
Эта конфликтно-управляемая система, и эти параметры позволяют нам сформулировать задачу сближения с целью в фиксированный момент окончания при наличии фазового ограничения $[t_0, \vartheta] \times \Phi$.

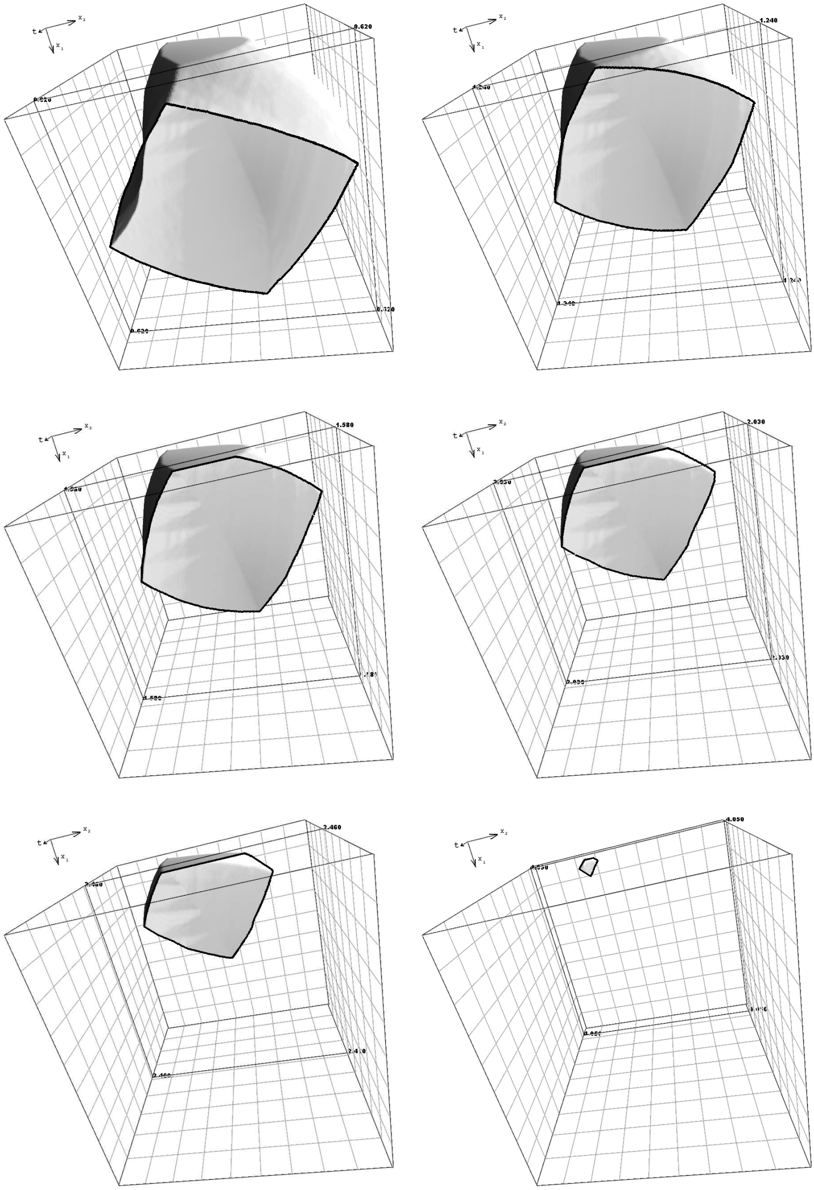
Таким образом, данная конфликтно-управляемая система принадлежит к классу систем, рассмотренных в примере 2 из раздела 3. Для приближенного вычисления стабильных мостов в рассматриваемом примере мы применяем оператор стабильности, базирующийся на семействе, состоящем из четырех многозначных отображений. Значениями каждого из этих многозначных отображений являются отрезки.

На рисунках представлены изображения приближенно вычисленного максимального стабильного моста $W^0$ в различных ракурсах:




Ниже изображены сечения моста $W^0$.





## Литература

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

2. Красовский Н. Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 5. С. 1260–1263.

3. Красовский Н. Н. Унификация дифференциальных игр // Игровые задачи

управления: Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. Т. 24. С. 32–45.

4. Григорьева С. В., Пахотинских В. Ю., Успенский А. А. и др. Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 4. С. 51–78.

5. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н. О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения. М., 1983. Деп. в ВИНИТИ 05.05.1983. № 2454-83.